Área:	Matemáticas	**Asignatura:**	Trigonometría	**Docente:**	John Faibert Quintero Oviedo
Grado:	Décimo	**Estudiante:**			

SECUENCIA DIDÁCTICA:
FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS, INDISPENSABLES EN LA ECONOMÍA Y LA ARQUEOLOGÍA

Propósito general:	Promover en la estudiante el aprendizaje mediante la búsqueda y selección crítica de información desde diferentes fuentes, así como su evaluación y validación, para su posterior procesamiento, jerarquización, interpretación y uso en la apropiación de saberes asociados a las funciones exponenciales y logarítmicas.
Propósitos específicos:	✓ Desarrollar la capacidad de abstracción y heurística para la comprensión y justificación de resultados matemáticos. ✓ Propiciar en la estudiante el análisis de situaciones y la resolución de problemas para reconocer y comprender la aplicación de la función exponencial en el mundo real. ✓ Fundamentar el aprendizaje de las funciones para modelizar fenómenos del mundo real.
Estándares curriculares	✓ Modelo situaciones de variación con funciones polinómica. ✓ Identifico la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en las gráficas que las representan. ✓ Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.
Derechos Básicos de Aprendizaje:	**2.** Propone y desarrolla expresiones algebraicas en el conjunto de los números reales y utiliza las propiedades de la igualdad y de orden para determinar el conjunto solución de relaciones entre tales expresiones. **12.** Conoce las propiedades y las representaciones gráficas de la familia de las funciones exponenciales $h(x) = ka^x$ con > 0 y distinto de 1, al igual que los cambios que los parámetros a y k producen en la forma de sus gráficas. En general comprende las propiedades y características de las gráficas para todos los casos. Utiliza funciones exponenciales para modelar situaciones y resolver problemas.
Competencias:	**Planteamiento y resolución de problemas:** • Resuelve problemas cada vez más complejos, descomponiéndolos en partes más sencillas y aplicando una diversidad de estrategias. • Hace generalizaciones de las soluciones que obtiene. **Razonamiento matemático:** •Establece la validez de conjeturas geométricas mediante la deducción. • Explica y justifica cómo llegó a una conclusión o a la solución de un problema. **Comunicación matemática:** • Utiliza el lenguaje matemático de manera precisa y rigurosa en sus trabajos escritos y presentaciones orales.
Evidencias de aprendizaje	• Establece conjeturas al resolver una situación problema, apoyado en propiedades y relaciones entre números reales. • Determina y describe relaciones al comparar características de gráficas y expresiones algebraicas o funciones.

INTRODUCCIÓN:

Las funciones exponenciales y logarítmicas tienen múltiples aplicaciones en situaciones de diversos contextos. Veamos algunos ejemplos: en geología para medir la intensidad de un terremoto usando la escala de Richter. En arqueología para estimar a edad de un fósil a través del proceso de datación por C14. En química para determinar el grado de acidez de una solución llamado PH. En física para determinar la sensación de intensidad del sonido medida en decibelios. En biología para medir el crecimiento de una colonia de bacterias. En economía para medir el tiempo en que un capital produce cierto interés. En estudios demográficos, para predecir en una población las necesidades surgidas en su crecimiento.

ACTIVIDAD 1:

Lee con atención la siguiente situación. Luego, representa gráficamente la situación y escribe una estrategia para resolver la pregunta.

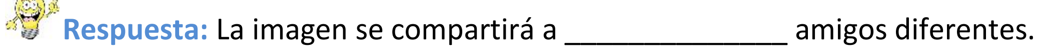
Luna comparte en Facebook la siguiente imagen con 4 de sus amigos. Luego, cada amigo de Luna comparte con 4 amigos diferentes, la misma imagen. Nuevamente, cada amigo comparte con 4 amigos diferentes más, la misma imagen. ¿En el siguiente paso a cuántas personas se les compartirá el anuncio?

Envía este mensaje a 4 personas diferentes y en 24 horas tu suerte mejorará

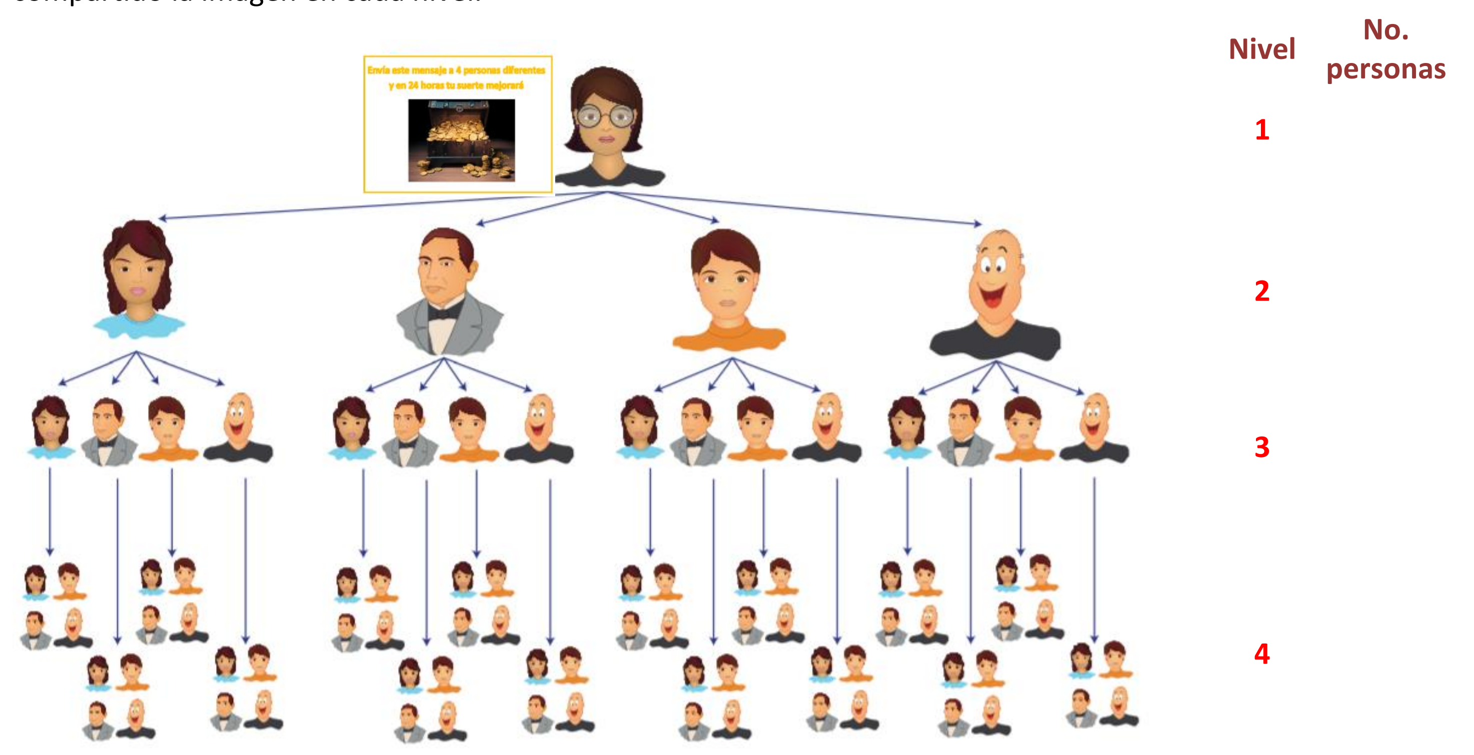


Representación gráfica de la situación:

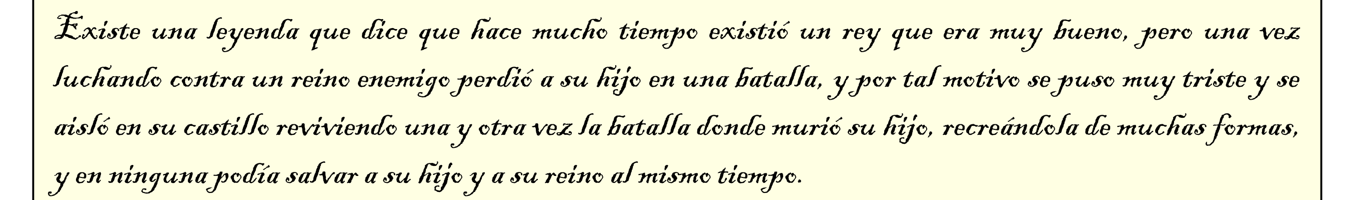




2. Observa el diagrama. Luego completa las expresiones que describen la cantidad de personas con las que se ha compartido la imagen en cada nivel.



3. Lee con atención la leyenda sobre la historia del ajedrez que Luna encontró en Facebook. Luego, completa las primeras casillas del tablero de ajedrez de acuerdo a lo expuesto en la historia.



Existe una leyenda que dice que hace mucho tiempo existió un rey que era muy bueno, pero una vez luchando contra un reino enemigo perdió a su hijo en una batalla, y por tal motivo se puso muy triste y se aisló en su castillo reviviendo una y otra vez la batalla donde murió su hijo, recreándola de muchas formas, y en ninguna podía salvar a su hijo y a su reino al mismo tiempo.

Un joven que sabía el dolor que el rey sentía pidió una entrevista con él, luego de muchos intentos logro que el rey le diera la entrevista, el joven mostró al rey el juego del ajedrez y le enseño su similitud con una batalla real. El rey que era un gran amante de los planes de guerra no tardo mucho tiempo en entender el juego, el joven le enseñó al rey como era de importante sacrificar alguna pieza para lograr ganar la partida (haciéndole ver que el sacrificio que su hijo había hecho fue lo mejor para el reino).

El rey comprendió su error y aceptó la muerte de su hijo, y le dijo al joven que le daría la recompensa que él pidiese. El joven le pidió la siguiente recompensa: ***por la primera casilla del tablero quiero un grano de trigo, por la segunda casilla quiero 2 granos de trigo, por la tercera casilla quiero 4 granos de trigo, por la cuarta casilla quiero 8 granos de trigos y así sucesivamente por las demás casillas****.*

El rey ordenó que entregaran la recompensa inmediatamente y agregó que era un pedido muy poco digno de su generosidad; los sabios del rey al tratar de encontrar el número que correspondía a la cantidad de granos de trigo se dieron cuenta que era un número muy grande y que no alcanzarían las reservas de trigo para pagar la recompensa. Así fue como el rey aprendió otra lección: ser prudente. Finalmente, reconociendo la genialidad del joven, le pidió con insistencia se quedara en el castillo y trabajara como uno de sus asesores reales.

¿Cuánto trigo se coloca en estas casillas? Exprésalo como potencia en la tabla a la derecha de la imagen.



Casilla	Cantidad de granos de trigo	
	Número	Como potencia
A		
B		
C		
D		
E		
F		

De acuerdo con la situación, ¿cuántos granos de trigo deberían colocarse en la última casilla, de color rojo, del tablero de ajedrez? Expresa como potencia.

¿Es posible determinar mediante una expresión algebraica, de manera general, la cantidad de granos de trigo en cualquiera de las casillas? **Si** **No** . Si tu respuesta es afirmativa ¿cuál sería esta expresión?

ACTIVIDAD 2: FENÓMENOS DE CRECIMIENTO EXPONENCIAL

Lee con atención las siguientes situaciones y luego contesta.



DAILY NEWS

El crecimiento de un cultivo de bacterias es tal que a cada hora se duplica el número de las mismas. En estas condiciones si había 100 bacterias al iniciar el experimento, el número habrá aumentado a 2.000 después de una hora, 4.000 después de dos horas y así sucesivamente.

Una población de aves, cuenta inicialmente con 50 individuos y se triplica cada dos años.

Una máquina industrial cuyo precio de compra fue de $10.000 se deprecia 1/10 cada 6 años.

1. ¿Qué tienen en común estas situaciones?

2. ¿Cuál es su comportamiento?

3. ¿Crecen o decrecen?

4. En relación a la primera noticia, el crecimiento de un cultivo de bacterias…
   - **A.** ¿De qué depende el crecimiento del cultivo de bacterias?
   - **B.** Realiza un listado de los resultados e indica cuál sería el patrón de crecimiento.
   - **C.** Propón una estrategia para indicar cuántas bacterias habrán pasadas 10 horas.

5. En relación a la segunda noticia, una población de aves…
   - **A.** De qué depende el crecimiento de la población de aves.
   - **B.** Si los primeros resultados son: 50, 150, 450, 1350, indica el patrón de crecimiento.
   - **C.** Describe una estrategia para indicar cuántas aves habrá en 6 años.

6. En relación a la tercera noticia, una máquina industrial, …
   - **A.** ¿De qué depende la depreciación de la máquina?
   - **B.** Realiza un listado de las primeras depreciaciones de la máquina e indica cuál sería el patrón de decrecimiento.
   - **C.** Describe una estrategia para indicar la depreciación de la máquina en t años.

ACTIVIDAD 3: LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

1. Observa la siguiente tabla. Luego, contesta.

x	y	
-3	1/8	
-2	1/4	2^{-2}
-1	1/2	2
0	1	2^0
1	2	
2	4	
3	8	2^3



A. ¿Qué variación presentan?

B. ¿Qué relación hay entre los valores de la magnitud x y los valores de la magnitud y?

Observa la regularidad que se presenta:

En la columna de la y tenemos potencias de 2. Tenemos que $8 = 2^3$, $\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$ o $\frac{1}{8} = 2^{-3}$. Es decir que como se observa, y se obtiene en términos de x, escribiéndolo como una función es: $\boldsymbol{f(x) = 2^x}$

2. Analiza los datos de la tabla. Luego, escribe la función y completa la tabla aplicando la función descrita.

x	y
-2	9/4
-1	3/2
0	1
1	2/3
2	4/9
3	8/27
4	16/81

Función:

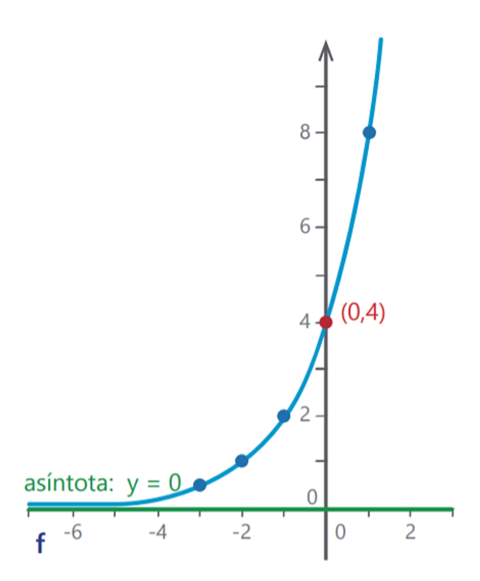
$$f(x) = (\quad)$$

x	y
-2	( )
-1	( )
0	( )
1	( )
2	( )
3	( )
4	( )

LA GRÁFICA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

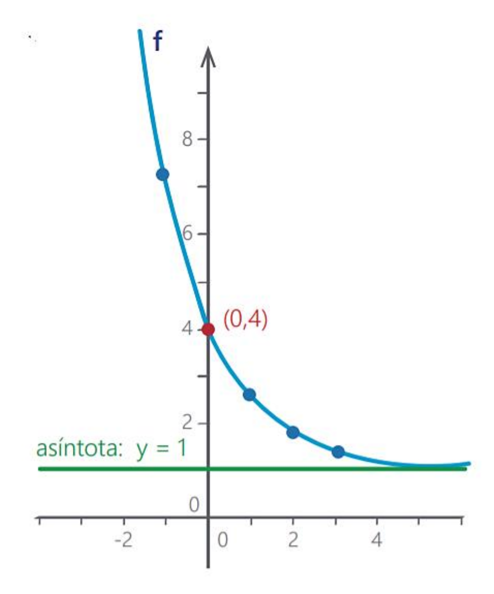
3. Cada tabla de acuerdo a la gráfica de la función exponencial propuesta.

A.



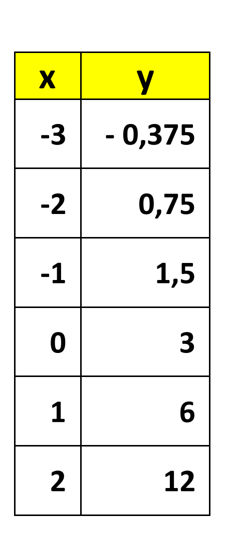
x	y
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

B.

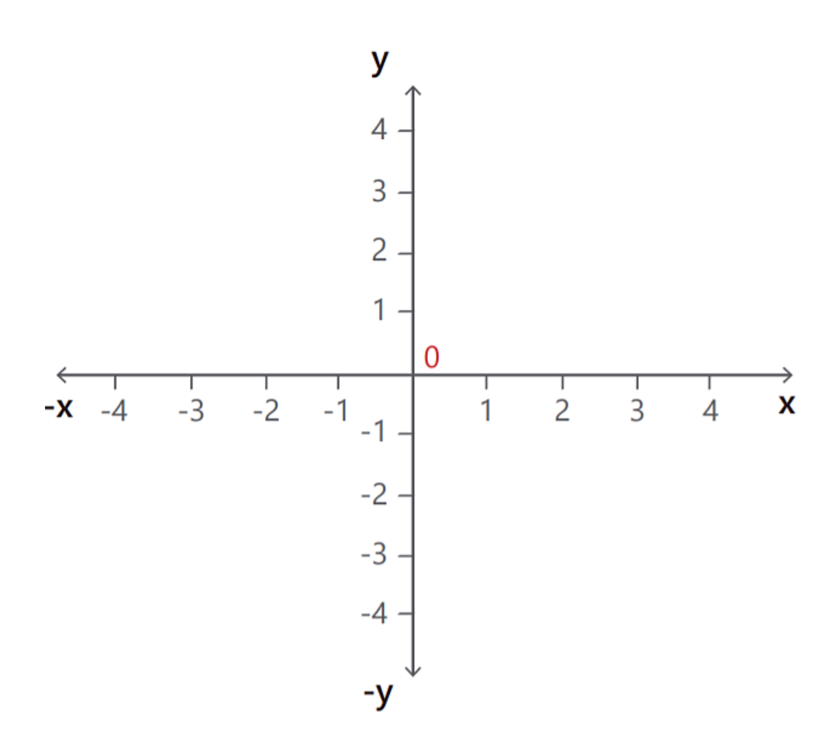


x	y
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

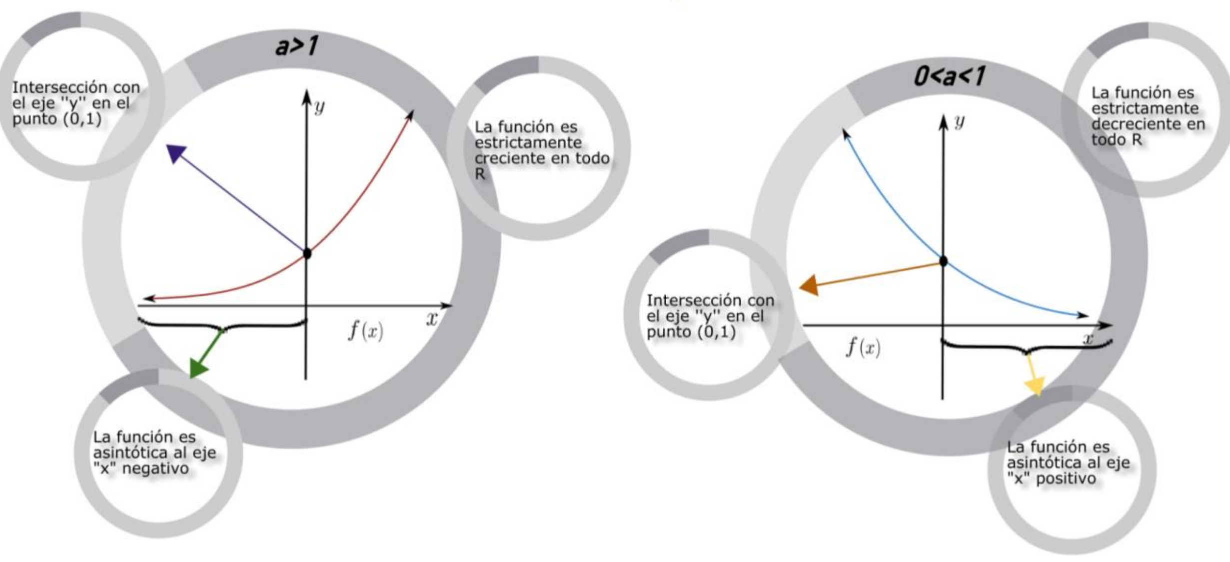
4. Traza la gráfica de la función exponencial, de acuerdo a los datos propuestos en la tabla.



x	y
-3	- 0,375
-2	0,75
-1	1,5
0	3
1	6
2	12



Adaptado de: Identificación de la función exponencial. Cápsulas de aprendizaje Colombia Aprende. Matemáticas. Grado 9. MEN. Disponible en: https://aprende.colombiaaprende.edu.co/sites/default/files/naspublic/ContenidosAprender/G_9/M/menu_M_G09_U04_L03/index.html



ACTIVIDAD 4: APLICACIONES DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

Analiza los siguientes problemas resueltos

Problema 1: El número de bacterias presentes en un cultivo en una caja de Petri después de t horas está dado por $\boldsymbol{q(t) = 500\, e^{0,03t}}$ **.** Se desea conocer:

A. ¿Cuál es el número de bacterias con que se inició el cultivo?

Solución:

Cuando se inició el cultivo el tiempo t transcurrido es cero. Entonces:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{q(0)} &= \boldsymbol{500 \cdot e^{0,03(0)}} && \text{Sustituyendo t=0} \\ &= 500 \cdot e^{0} && \text{Operando} \\ &= 500 \cdot 1 && \text{Propiedad } a^0 = 1 \\ &= 500 && \text{Resolviendo} \end{aligned}$$

Respuesta: El cultivo inició con 500 bacterias.

B. ¿Cuántas bacterias hay después de 5 horas?

Solución:

Cuando se indica que han transcurrido 5 horas se tiene que $t = 5$. Entonces:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{q(5)} &= \boldsymbol{500\, e^{0,03(5)}} && \textit{Sustituyendo t=0} \\ &= 500\, e^{0,15} && \textit{Operando} \\ &\approx 500(1{,}162) && \textit{Calculando } e^{0,15}=1{,}162 \\ &\approx 580 && \textit{Resolviendo} \end{aligned}$$

Respuesta: Después de 5 horas hay 580 bacterias aproximadamente.

Problema 2: La presión atmosférica en función de la altura está dada por la expresión $\boldsymbol{p(h) = p_0 e^{-0,00003h}}$, donde $\boldsymbol{h}$ se da en pies y $\boldsymbol{p}$ en libras por pie cuadrado. Si la presión atmosférica a nivel del mar es de *2116 lb/ft*^{2}, encuentre la presión atmosférica sobre un aeroplano que está a $10000\ ft$ de altura.

Solución: Se tiene que $p_0 = 2116\ lb/ft^2$, entonces

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p(10000)} &= \boldsymbol{2116\, e^{-0,00003(10000)}} && \text{Sustituyendo } p_0 \text{ y } h \\ &= 2116\, e^{-0,3} && \text{Operando} \\ &= 1567{,}6\ lb/ft^2 \end{aligned}$$

Respuesta: La presión atmosférica sobre un aeroplano que está a $10000\ ft$ de altura es de $1567{,}6\ lb/ft^2$.

Realiza la representación gráfica y la verificación las características (dominio, rango, cortes con los ejes) para las siguientes funciones. ***Sugerencia: Emplea papel milimetrado para esbozar la gráfica de cada función.***

1. $f(x) = 5^x$ **2.** $g(x) = (1/5)^x$ **3.** $h(x) = 2^{2-x}$ **4.** $m(x) = 2^{x+1}$

5. $n(x) = 2^{x-2}$ **6.** $p(x) = (1/2)^{x+1}$ **7.** $q(x) = [(3/4)^x]^3$

Resuelve los siguientes problemas mediante procedimientos ordenados y claros

8. El número de bacterias de un cultivo después de ***t*** minutos está dado por $q(t) = 1000e^{0,07t}$. ¿Con cuántas bacterias se inició el cultivo? ¿Cuántas bacterias hay después de 1 hora? ¿Y después de 2 horas?

9. La expresión $A = P(1+i)^t$, donde ***P*** es el capital invertido, ***i*** es el interés o porcentaje percibido, ***t*** es el tiempo y ***A*** es la cantidad de dinero obtenido después de *t* años, es una manera de escribir la ecuación de interés compuesto.

A. Calcula el dinero *A* que produce un capital, *P,* de $2 000 000, prestado al 5%, durante 3 años.

B. Construye una tabla de valores con el capital *P* anterior, al mismo interés, durante 1, 2, 3, 4 y 5 años.

C. Traza una gráfica que ilustre la situación anterior.

10. El isótopo radiactivo Bi^{210} tiene una vida media de 5 días; es decir, el número de partículas radiactivas se reducirá a la mitad del número original de partículas en 5 días. Si se tiene 100 mg de este isótopo en el instante ***t =0***, entonces la cantidad ***f(t)*** restante después de *t* días está dada por $f(t) = 100(2^{-t/5})$.

A. ¿Qué cantidad de isótopos permanece después de 5 días?
B. ¿Qué cantidad de isótopos hay después de 10 días?

RECURSOS DIGITALES PARA EL APRENDIZAJE RECOMENDADOS:

- Video: Función exponencial - Resolución de problemas.
  Disponible en: **https://youtu.be/NonKn-kLVPc**
- Video: Crecimiento y decrecimiento exponencial.
  Disponible en: **https://youtu.be/dabpdCN5jnM**
- Funciones exponencial y logarítmica - Manipulativo en Geogebra.
  Disponible en: **https://www.geogebra.org/m/pXfHPKvH**